Vzorový projekt do MF

Gravitační přitahování a srážka dvou těles

Alois Natvrdlý, OFMF 3. ročník,
alois.natvrdly@upol.cz

1. dubna 2016

1. Formulace problému

Dvě tělesa o hmotnostech $m = 1\,\mathrm{kg}$ se nacházejí ve vzdálenosti $a = 1\,\mathrm{km}$ od sebe ve volném prostoru a gravitačně na sebe působí. Za jak dlouho se srazí? Jakou rychlostí se srazí? Jak vypadá průběh pohybu? Za jak dlouho se zkrátí vzdálenost mezi tělesy na polovinu?

2. Řešení (analýza, teorie, numerika)

Analýza problému

Obě tělesa se vzájemně gravitačně přitahují a nakonec se srazí ve společném těžišti. Rychlost srážky bude záviset na rozměru těles, při malých rozměrech objektů poroste teoreticky do nekonečna, což bude určitě dělat problémy při numerickém i analytickém řešení. Pohyb probíhá po spojnici obou těles, těžiště soustavy těles leží uprostřed mezi oběma tělesy. Zavedeme souřadnou soustavu těžištěm soustavy těles, díky symetrii problému je pohyb jednoho tělesa $x(t)$ a druhého $-x(t)$, kde $x(t)$ je popsáno Newtonovou pohybovou rovnicí

$$m\ddot{x} = -\kappa\frac{m^2}{4x^2},$$

neboť aktuální vzdálenost obou těles je $2x$. Počáteční podmínky jsou $x(0) = \frac{1}{2}a$ a $\dot{x}(0) = 0$. Pokud zavedeme raději vzdálenost mezi tělesy $r = 2x$, nabude rovnice pro $r(t)$ tvaru

$$\ddot{r} = -\frac{2\kappa m}{r^2} \tag{1}$$

a počáteční podmínky budou $r(0) = a$ a $\dot{a}(0) = 0$. Musíme tedy vyřešit na první pohled zdánlivě jednoduchou diferenciální rovnici (1). Analytické řešení rovnice (1) je, jak uvidíme dále, docela komplikované, rovnice (1) je ale vhodná k numerické integraci.

Kvalitativní odhad

Pohyb je zpočátku velmi pomalý a zabere tedy největší část z doby pádu, první odhad doby pádu dostaneme z předpokladu stálého zrychlení

$$\ddot{r}_0 = \frac{2\kappa m}{a^2},$$

odtud je doba pádu

$$T_0 \approx \sqrt{\frac{2a}{\ddot{r}_0}} \approx \sqrt{\frac{a^3}{\kappa m}} \approx \sqrt{\frac{1000^3}{6.67\times 10^{-11}}} \approx 123 \text{ let.}$$

Pohyb se ve skutečnosti urychluje, jak roste přitažlivá síla vlivem přibližování těles, můžeme proto očekávat skutečnou dobu pádu kratší $T < 123$ let.

Odhadneme ještě rychlost srážky pomocí zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \kappa\frac{m^2}{2r_0} = -\kappa\frac{m^2}{a}. \tag{2}$$

Předpokládejme sférický tvar těles o poloměru r_0, ze zákona zachování energie (2) vyjde rychlost srážky v_0

$$v_0 = \sqrt{\kappa m\left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{a}\right)} \approx \sqrt{\frac{\kappa m}{2r_0}},$$

neboť rozměr těles je mnohem menší než počáteční vzdálenost těles. Pokud budou obě tělesa například z oceli o hustotě $\rho \approx 7800\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$, bude jejich poloměr roven

$$r_0 \approx \left(\frac{3}{4}\frac{m}{\pi\rho}\right)^{1/3} \approx 3.1\,\mathrm{cm}\,.$$

Pro rychlost srážky ocelových koulí tak máme odhad

$$v_0 = \sqrt{\kappa m\left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{a}\right)} \approx \sqrt{\frac{6.67\times 10^{-11}}{2 * 0.031}} \approx 3.3\times 10^{-5}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}\,.$$

Vidíme, že termín srážka tu asi není tak docela na místě při rychlosti setkání v řádu desítek mikrometrů za sekundu.

Numerické řešení

Pro numerické řešení je vhodné rovnici přeškálovat do bezrozměrných veličin

$$\rho = \frac{r}{a} \quad \text{a} \quad \tau = \frac{t}{T_0},$$

kde

$$T_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\kappa m}}$$

je náš první odhad doby pádu. Při změně zadání nemusíme řešit celou numeriku znova, ale stačí upravit a a T_0. Z pohybové rovnice (1) tak dostaneme bezrozměrnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{2}{\rho^2}$$

spolu s počátečními podmínkami $\rho(0) = 1$ a $\dot{\rho}(0) = 0$.

Elementární numerické řešení (**explicitní Eulerova metoda**) spočívá v rozdělení integračního času τ na drobné díly $\Delta\tau$ a v postupném výpočtu rychlosti v_{n+1} a polohy ρ_{n+1} v novém čase $\tau_{n+1} = \tau_n + \Delta\tau$ z rychlosti v_n a polohy a_n v dřívějším čase τ_n. Z definice rychlosti máme první potřebnou rovnici

$$\rho_{n+1} = \rho_n + v_n \Delta\tau \tag{3}$$

a z pohybového zákona druhou

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta\tau = v_n - \frac{2}{\rho_n^2}\Delta\tau. \tag{4}$$

Protože známe počáteční hodnoty $\rho_0 = 1$ a $v_0 = 0$, můžeme pomocí iteračních vzorců (3) a (4) vypočíst ρ_1 a v_1, z nich ρ_2 a v_2 atd. Výpočet musíme zastavit při dosažení $\rho = 0$. Jako dobrý test přesnosti výpočtu slouží zákon zachování energie, která je dána předpisem

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{2}{r}.$$

Při dostatečně přesném výpočtu by se hodnota E_n numericky vypočtené energie soustavy neměla příliš lišit od teoretické hodnoty $E = -2$.

Numerické výsledky pro krok $\Delta\tau = 0.01$ a srovnání s přesným řešením vpravo uvádí tabulka.

t	r_num	v_num	E_num	r	v	E
0	1.0000	0	-2.0000	1.0000	0	-2.0000
0.0500	0.9970	-0.1002	-2.0010	0.9975	-0.1002	-2.0000
0.1000	0.9890	-0.2013	-2.0021	0.9900	-0.2013	-2.0000
0.1500	0.9758	-0.3046	-2.0032	0.9773	-0.3046	-2.0000
0.2000	0.9574	-0.4111	-2.0045	0.9595	-0.4112	-2.0000
0.2500	0.9335	-0.5223	-2.0060	0.9361	-0.5224	-2.0000
0.3000	0.9039	-0.6400	-2.0078	0.9071	-0.6400	-2.0000
0.3500	0.8682	-0.7662	-2.0102	0.8720	-0.7663	-2.0000
0.4000	0.8258	-0.9042	-2.0132	0.8303	-0.9042	-2.0000
0.4500	0.7760	-1.0580	-2.0175	0.7813	-1.0581	-2.0000
0.5000	0.7179	-1.2344	-2.0239	0.7241	-1.2346	-2.0000
0.5500	0.6501	-1.4439	-2.0341	0.6573	-1.4441	-2.0000
0.6000	0.5703	-1.7057	-2.0522	0.5788	-1.7061	-2.0000
0.6500	0.4749	-2.0595	-2.0906	0.4852	-2.0602	-2.0000
0.7000	0.3566	-2.6102	-2.2020	0.3696	-2.6118	-2.0000
0.7500	0.1949	-3.8228	-2.9566	0.2140	-3.8330	-2.0000
0.7800	0.0266	-7.2569	-48.9149	0.0632	-7.7010	-2.0000

Z tabulky vidíme, že bezrozměrná doba pádu je $\tau_0 \approx 0.78$, odtud máme skutečnou dobu pádu $t_0 = T_0\tau_0 \approx 123 * 0.78 \approx 96$ let. Pokud zkrátíme krok (a prodloužíme výpočet) stokrát, bude $\Delta\tau = 0.0001$ a doba pádu $\tau_0 = 0.7853$. Jak ukážeme dále, přesné analytické řešení je $\tau_0 = \pi/4 \approx 0.7854$, tedy numerická metoda dává správný výsledek na 4 platná místa.

Numerické výsledky pro krok $\Delta\tau = 0.0001$ a srovnání s přesným řešením vpravo uvádí tabulka.

t	r_num	v_num	E_num	r	v	E
0	1.0000	0	-2.0000	1.0000	0	-2.0000
0.0500	0.9975	-0.1002	-2.0000	0.9975	-0.1002	-2.0000
0.1000	0.9900	-0.2013	-2.0000	0.9900	-0.2013	-2.0000
0.1500	0.9773	-0.3046	-2.0000	0.9773	-0.3046	-2.0000
0.2000	0.9594	-0.4112	-2.0000	0.9595	-0.4112	-2.0000
0.2500	0.9361	-0.5224	-2.0001	0.9361	-0.5224	-2.0000
0.3000	0.9071	-0.6400	-2.0001	0.9071	-0.6400	-2.0000
0.3500	0.8719	-0.7663	-2.0001	0.8720	-0.7663	-2.0000
0.4000	0.8302	-0.9042	-2.0001	0.8303	-0.9042	-2.0000
0.4500	0.7812	-1.0581	-2.0002	0.7813	-1.0581	-2.0000
0.5000	0.7240	-1.2346	-2.0002	0.7241	-1.2346	-2.0000
0.5500	0.6572	-1.4441	-2.0003	0.6573	-1.4441	-2.0000
0.6000	0.5787	-1.7061	-2.0005	0.5788	-1.7061	-2.0000
0.6500	0.4851	-2.0602	-2.0009	0.4852	-2.0602	-2.0000
0.7000	0.3695	-2.6118	-2.0019	0.3696	-2.6118	-2.0000
0.7500	0.2138	-3.8330	-2.0084	0.2140	-3.8330	-2.0000
0.7853	0.0029	-29.3786	-250.2074	0.0044	-30.0080	-2.0000

Analytické řešení

Pro analytické řešení je vhodnější začít rovnou se zákonem zachování energie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \kappa\frac{m^2}{2x} = -\kappa\frac{m^2}{a},$$

resp. po transformaci $x \to r = 2x$

$$\dot{r}^2 = 4\kappa m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Odtud máme diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{4\kappa m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

kde jsme zvolili znaménko minus s ohledem na skutečnost, že vzdálenost r obou těles s časem t klesá. Separací proměnných dostaneme rovnici

$$-\int_a^r \sqrt{\frac{r}{a-r}}\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{4\kappa m}{a}}t.$$

Integrál vlevo vyřešíme například substitucí $r = a\cos^2 u$, tak dostaneme

$$-\int_a^r \sqrt{\frac{r}{a-r}}\mathrm{d}r = 2a\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{r}{a}}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u.$$

Integrál vpravo již snadno vypočteme, když si uvědomíme goniometrickou identitu

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right),$$

integrace pak dává

$$\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cos u \sin u + \frac{1}{2}u,$$

takže výsledek naší integrace zní

$$-\int_a^r \sqrt{\frac{ar}{a-r}}\mathrm{d}r = a\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\sqrt{1-\frac{r}{a}} + \arccos\sqrt{\frac{r}{a}}\right).$$

Odtud máme analytické řešení $r(t)$ ve tvaru implicitní funkce

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\sqrt{1-\frac{r}{a}} + \arccos\sqrt{\frac{r}{a}} = \sqrt{\frac{4\kappa m}{a^3}}t,$$

a pro exaktní dobu pádu do srážky $r = 0$ odtud máme výsledek

$$t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^3}{4\kappa m}} = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{16\kappa m}} = \sqrt{\frac{\pi^2 1000^3}{16 * 6.67\times 10^{-11}}} \approx 96.432 \text{ let.} \tag{5}$$

Doba pádu do poloviční vzdálenosti $r = \frac{1}{2}a$ je

$$t_{1/2} = \frac{2+\pi}{4}\sqrt{\frac{a^3}{4\kappa m}} = \frac{2+\pi}{2\pi}t_0 \approx 0.81831 t_0 \approx 78.911 \text{ let},$$

3. Závěr

Sestavili jsme pohybové rovnice a zákon zachování pro padající tělesa. Vypočetli jsme průběh pádu numericky pomocí Eulerovy metody s krokem 0.01 a 0.0001 a ukázali, že přesnost numerických výsledků se se zmenšujícím se krokem $\Delta\tau$ zlepšuje. Z připojených výsledků je také vidět, že chyba Eulerovy integrační metody na každém kroku je řádu $\Delta\tau^2$ a kumulovaná chyba vypočtených dat roste zhruba jako $\tau\Delta\tau$. Vypočetli jsme průběh pádu také analyticky.

Oběma metodami nám vyšlo, že pád těles trvá zhruba 96 let, z toho první polovina pádu trvá asi 79 let. Z rozměrové analýzy je patrné, že pokud bychom změnili hmotnosti m těles nebo jejich počáteční vzdálenost a, doba pádu t_0 poroste úměrně veličině $\sqrt{a^3/m}$. Proto například, kdyby byla počáteční vzdálenost těles $a = 1\,\mathrm{m}$, srazí se již za $1000^{3/2}$ krát kratší dobu, tj. zhruba za 27 hodin. Dále jsme ukázali, že rychlost srážky těles je velmi malá, typicky v řádu desítek mikrometrů za sekundu.

Numerický výpočet by bylo možno provést pohodlněji a přesněji také pomocí speciálních zabudovaných funkcí MATLABu (např. pomocí integrační procedury ode45).

Konečně, přesnou dobu pádu, tj. vzorec (5), je možno nalézt elementárně také pomocí 3. Keplerova zákona [1]

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\kappa\,(m_1 + m_2)}{4\pi^2}.$$

Protože trajektorii pádu každého z těles lze chápat jako nekonečně úzkou elipsu, dosadíme do Keplerova zákona za $m_1 = m_2 \to m$, za poloosu a relativního pohybu polovinu naší počáteční vzdálenosti těles, tedy $a \to \frac{1}{2}a$ a za periodu pohybu T dvojnásobek naší doby pádu, tedy $T \to 2t_0$.

Literatura

[1] J. Bajer: Mechanika 2, chlup.net Olomouc 2008, str. 452

```
------------------------------------------------------------------------
Zdrojovy kod programu pro MATLAB
------------------------------------------------------------------------


------------------------------------------------------------------------
% srazka dvou teles - vzorovy projekt do MF
------------------------------------------------------------------------


dt=0.01;         % krok
r=1;v=0;t=0;     % pocatecni podminky

t_vek=t;
r_vek=r;
v_vek=v;

while r>0        % integracni smycka
t=t+dt;
a=-2/r^2;
v=v+a*dt;        % modifikovana Eulerova metoda
```

```
r=r+v*dt;       % spravne maji byt radky pro v a r prohozeny
t_vek=[t_vek;t];
v_vek=[v_vek;v];
r_vek=[r_vek;r];
end

t_vek(end)=[];  % vymazat posledni udaje
v_vek(end)=[];
r_vek(end)=[];

doba_padu=t_vek(end)

figure(1);plot(t_vek,r_vek);title('r(t)')
figure(2);plot(t_vek,v_vek.^2/2-2./r_vek);title('Zakon zachovani energie')
------------------------------------------------------------------------
```